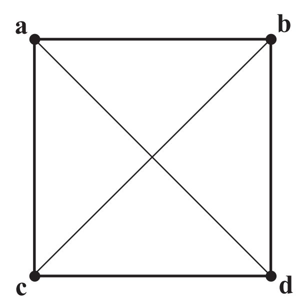
لطافت امیری
دانشجوی دکتری ریاضی محض دانشگاه تربیت‌مدرس

مجموعهٔ احاطه‌گر و کاربرد آن در رنگ‌آمیزی گراف

تعریف مجموعهٔ احاطه‌گـــر: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رأس‌های گــراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم، هر گاه هر رأس از گراف، یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رأس‌های D مجاور باشد.

تعریـــف مجموعهٔ احاطه‌گـــر مینیمم و عدد احاطه‌گری: بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارنـــد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. عدد احاطه‌گری گراف زیر را بیابید.



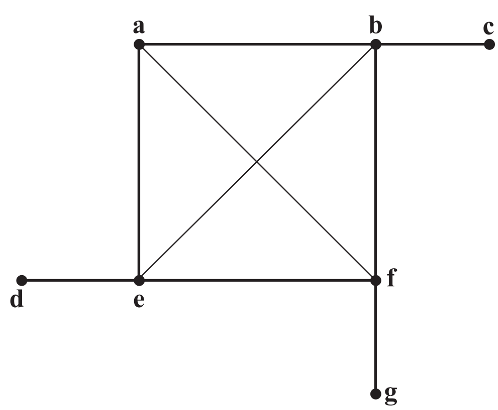
شکل ۱. گراف $K_۴$

حل: همان‌طور که در تمرینـــات پایان فصل کتاب درســی محاســـبه کردید، گراف‌های کامل دارای عدد احاطه‌گری ۱ هستند؛ یعنی: $\gamma(K_n)=۱$. چون گراف بالا یک گراف کامل با ۴ رأس است، پس: $\gamma(K_۴)=۱$.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

مثال ۲. عدد احاطه‌گری گراف زیر را بیابید.



شکل ۲. گراف $G_۱$

حل: با توجه به شکل ۲ داریم: $n=۷$ و $\Delta=۴$، و با استفاده از نکته داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۷}{۵} \right\rceil = ۲ \leq \gamma(G_۱)$$

بنابراین مجموعه احاطه‌گر گراف $G_۱$ دارای حداقل دو رأس است. در ادامه نشان می‌دهیم که دو رأس برای احاطه‌کردن تمام رأس‌های $G_۱$ کافی نیست.

برای احاطه کردن رأس c باید b یا c در $\gamma(G_1)$ باشد. چون رأس b با رأس‌های بیشتری مجاور است و در نتیجه رأس‌های بیشتری را احاطه می‌کند، رأس b را برای بودن در $\gamma(G_1)$ انتخاب می‌کنیم.

اکنون رأس‌های g و d احاطه نشده‌اند. برای احاطه کردن d باید e یا d در $\gamma(G_1)$ باشد. مشابه استدلال بالا e را انتخاب می‌کنیم.

همچنان، رأس g احاطه نشده است و برای احاطه شدن باید g یا f در $\gamma(G_1)$ باشند. در این حالت تفاوتی بین انتخاب g یا f نیست و ما g را انتخاب می‌کنیم.

پس $\{b,e,g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. در نتیجه: $\gamma(G_1)=۳$.

اشاره:

به گراف‌هایی مانند گراف G_1 که رأس‌های آن قابل افراز به یک گراف کامل و یک مجموعه از رأس‌هایی است که با رأس‌های گراف کامل مجاورند، «گراف جدایی‌پذیر» گفته می‌شود.

مفاهیم سادهٔ مجموعهٔ احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری در مسائل و مفاهیم پیچیده و سطوح بالای گراف نقش اساسی و کاربردی دارند. از مهم‌ترین کاربردهای عدد احاطه‌گری تعیین کران‌های متفاوت برای عدد رنگی در رنگ‌آمیزی‌های مختلف گراف است. برای آشنایی بیشتر شما ابتدا مفاهیم اولیهٔ رنگ‌آمیزی گراف را بیان می‌کنیم.

در مبحث رنگ‌آمیزی گراف دو نوع رنگ‌آمیزی داریم: «رنگ‌آمیزی رأسی» و «رنگ‌آمیزی یالی». در این مقاله به تعریف رنگ‌آمیزی رأسی می‌پردازیم.

تعریف: رنگ‌آمیزی رأسی معتبر یک گراف، آن‌گونه رنگ‌آمیزی است که هیچ دو رأس مجاوری رنگ یکسانی نداشته باشند. اگر به دو رأس مجاور رنگ یکسان بدهیم، رنگ‌آمیزی ما دیگر معتبر نخواهد بود.

تعریف: رنگ‌آمیزی معتبر C را که در آن از K رنگ استفاده شده است، یک K- رنگ‌آمیزی (معتبر) می‌نامیم. زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها که با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند، یک کلاس رنگی نامیده می‌شوند.

تعریف: کمترین تعداد رنگ‌ها از بین تمام رنگ‌آمیزی‌های معتبر G، عدد رنگی G است که با $X(G)$ نشان داده می‌شود. به گرافی که یک k رنگ‌آمیزی معتبر را می‌پذیرد. k - رنگ‌پذیر گفته می‌شود و اگر عدد رنگی آن دقیقاً k باشد، به آن k- رنگی گفته می‌شود.

مثال ۳. عدد رنگی گراف داده شده در مثال۱ را بیابید.

حل: اگر به رأس a رنگ شماره یک را بدهیم، چون رأس a با تمام رأس‌ها مجاور است، بقیهٔ رأس‌ها باید رنگ متفاوتی بگیرند تا رنگ‌آمیزی ما معتبر باشد به همین ترتیب، رأس b رنگ شماره دو و رأس c رنگ شمارهٔ سه و رأس d رنگ شمارهٔ چهار را می‌گیرد. بنابراین، تعداد رنگ‌های مورد نیاز ما ۴ رنگ است و این تعداد رنگ، کمترین تعداد است. لذا: $X(K_4)=۴$.

به‌طور کلی، عدد رنگی K_nها برابر با n است، چون تمام رأس‌ها با هم مجاور هستند و هر رأس باید رنگ متمایزی بگیرد.

مثال ۴. عدد رنگی گراف داده شده در مثال ۲ را بیابید.

حل: اگر رأس a رنگ شمارهٔ یک را بگیرد، رأس‌های b، f و e که با a مجاورند، باید رنگ‌های متفاوتی بگیرند. بنابراین به b رنگ شمارهٔ۲ می‌دهیم و چون b با f، e و c مجاور است، این سه رأس باید رنگ‌های متفاوتی بگیرند.

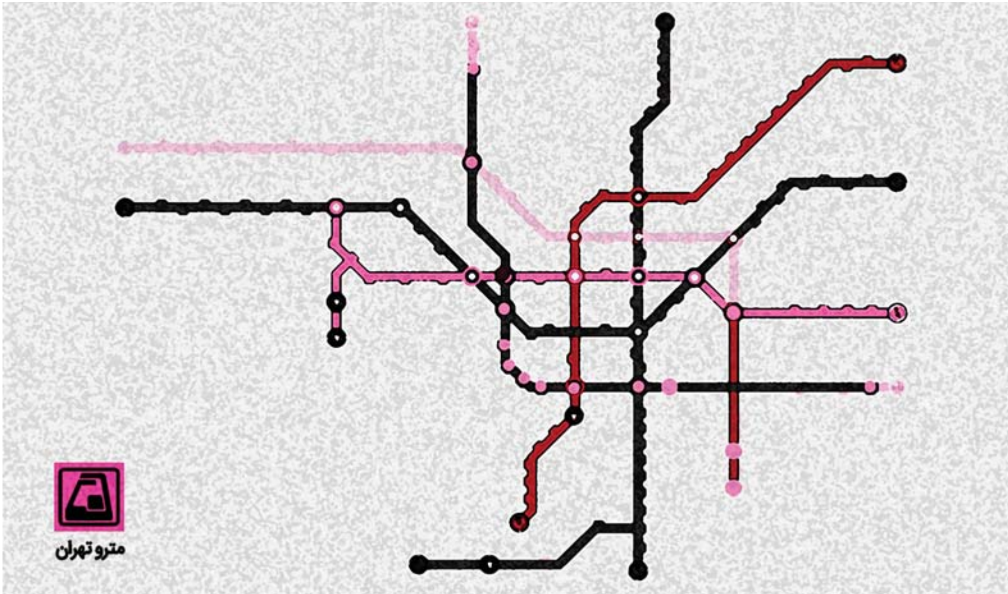
رأس c می‌تواند رنگ شماره یک را بگیرد، چون با a مجاور نیست.

رأس f رنگ شمارهٔ یک و دو را نمی‌تواند بگیرد، چون با a و b مجاور است. پس رأس f رنگ شمارهٔ ۳ را می‌گیرد. رأس‌های g و e با f مجاورند و باید رنگی متفاوت با رنگ شمارهٔ ۳ بگیرند.

رأس g فقط با f مجاور است و به جز رنگ سه می‌تواند به دلخواه رنگ یک یا دو را بگیرد. ما رنگ دو را به g می‌دهیم.

چون رأس e با b، f و c مجاور است، باید رنگی متمایز بگیرد. بنابراین رنگ شمارهٔ چهار را به e می‌دهیم.

رأس d چون با e مجاور است، به جز رنگ شمارهٔ ۴ می‌تواند به دلخواه رنگ یک، دو یا سه را بگیرد. ما رنگ



یک را به d می‌دهیم.

بنابراین: $X(G_1)=4$

کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ یک:	$\{a,c,d\}$
کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ دو:	$\{b,g\}$
کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ سه:	$\{f\}$
کلاس رنگیِ رنگ شمارهٔ چهار:	$\{e\}$

اکنـــون به دو کاربرد از چندیـــن کاربرد $\gamma(G)$، در یافتن کران برای $X(G)$ اشـــاره می‌کنیم که در مقالات معتبر به اثبات رسیده‌اند:

رابطهٔ ۱ $\quad \max\{\gamma(G),X(G)\}\leq\gamma(G)+x(G)$

در گراف شکل ۱، یعنی K_4 به دست آوردیم:

$\gamma(K_4)=1 \quad , \quad X(K_4)=4$

بنابراین: $\max\{\gamma(K_4),X(K_4)\}=4$ و رابطهٔ۱برای گراف k_4 برقرار است.

$$\max\{\gamma(K_4),X(K_4)\}=4\leq\gamma(K_4)+X(K_4)=5$$
$$\Rightarrow 4\leq 5$$

در گراف شکل۲، یعنی G_1، به دست آوردیم:

$\gamma(G_1)=3 \quad , \quad X(G_1)=4$

بنابراین: $\max\{\gamma(G_1),X(G_1)\}=4$ و رابطهٔ۱برای گراف G_1 برقرار است.

$$\max\{\gamma(G_1),X(G_1)\}=4\leq\gamma(G_1)+X(G_1)=7$$
$$\Rightarrow 4\leq 7$$

رابطهٔ۲: اگر n تعداد رأس‌های گراف G باشد، داریم:

$$\gamma(G)X(G)\leq n^2/4$$

در گراف شکل ۱ داریم:

$$\gamma(K_4)=1, X(K_4)=4, n=4$$

بنابراین:

$$1\times 4\leq\frac{(4)^2}{4}\Rightarrow 4\leq 4$$

رابطهٔ ۲ برای K_4 برقرار است.

در گراف شکل ۲ داریم:

$$\gamma(G_1)=3, X(G_1)=4, n=7$$

بنابراین:

$$4\times 3\leq\frac{(7^2)}{4}\Rightarrow 12\leq 12/25$$

رابطهٔ ۲ برای G_1 نیز برقرار است.

* منابع

1. Relation between the lower domination parameters and the chromatic number of a graph (Mustapha Chellali, Lutz Volkmann)
2. Dominated colorings of graphs (Housin Boumediene Merouane, Mohammad Haddad, Mustapha Chellali, Hamamache Kheddouci